2025
ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI

FİNAL SINAVI

11. SINIF SORU KİTAPÇIĞI

ADI SOYADI : ....
OKUL .... SINIF : ....
İMZA : ....

1. **8 puan - 8 points - 8 баллов - 8 xal**

1 Altı basamaklı bir sayının sağdan ilk rakamı 7'dir ve bu rakam silinip sayının en soluna yazılınca yeni elde edilen sayı, ilk sayının 4 katı oluyor. Bu sayının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

1 The first digit from the right of a six-digit number is 7, and when this digit is deleted and written to the left of the number, the new number obtained is 4 times the first number. What is the remainder when this number is divided by 9?

1 Первая цифра справа в шестизначном числе — 7, и если эту цифру вычеркнуть и записать слева от числа, то полученное новое число будет в 4 раза больше первого числа. Какой остаток получится при делении этого числа на 9?

1 Altı rəqəmli ədədin ən sağındaki rəqəm 7-dir və bu rəqəm silinib ədədin ən soluna yazılarsa yeni alınan ədəd birinci ədədin 4 misli olur. Bu ədəd 9-a bölünəndə qalıq neçə olar?

A) 5 **B**) 1 **C**) 8 **D**) 7 **E**) 0

Çözüm

İlk sayı m beş basamaklı bir sayı olmak üzere

$$10m + 7$$

şeklinde yazılabilir. Sonraki sayı ise

$$7 \cdot 10^5 + m$$

şeklinde yazılabilir. Problemin ifadesinden

$$\begin{aligned} 4(10m+7) = (7 \cdot 10^5 + m) &\Rightarrow 39m = 7 \cdot 10^5 - 28 \\ &\Rightarrow 39m = 699\,972 \\ &\Rightarrow 13m = 233324 \\ &\Rightarrow m = 17\,948 \end{aligned}$$

olur. O halde, ilk sayı 17 9487 olur. Bu sayının 9 ile bölümünden kalan da 0 olur.

Yanıt : **E) 0**

2. 8 Puan - 8 Points - 8 баллов - 8 xal

2 ABC üçgeninde A'dan çizilen iç açıortay $[BC]$ kenarını D noktasında kesmektedir.

$$m(\angle ABC) = 2 \cdot m(\angle ACB), \quad |BD| = 4, \quad |AB| = 6$$

olduğuna göre $|DC|=$?

2 In triangle ABC, the internal angle bisector drawn from A intersects the side $[BC]$ at point D. If |

$$m(\angle ABC) = 2 \cdot m(\angle ACB), \quad |BD| = 4, \quad |AB| = 6$$

what is $|DC|$?

2 В треугольнике ABC биссектриса, проведенная из точки A, пересекает сторону $[BC]$ в точке D. Если

$$m(\angle ABC) = 2 \cdot m(\angle ACB), \quad |BD| = 4, \quad |AB| = 6$$

то $|DC|=$?

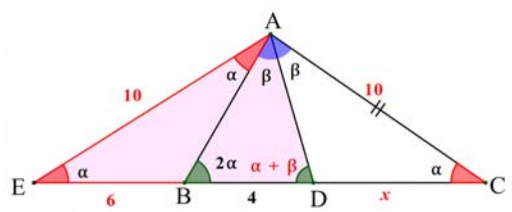
2 ABC üçbucağında A-dan çəkilmiş tənbölən $[BC]$ tərəfi ilə D nöqtəsində kəsişir. Əgər

$$m(\angle ABC) = 2 \cdot m(\angle ACB), \quad |BD| = 4, \quad |AB| = 6$$

isə, $|DC|=$?

A) $\frac{21}{4}$ **B)** 6 **C)** $\frac{19}{4}$ **D)** $\frac{20}{3}$ **E)** 7

Çözüm



$|AB| = |EB|$ ve $m(\angle BAE) = m(\angle ACB) = \alpha$ olacak şekilde $[CB$ ışını üzerinde bir E noktası alalım. Bu durumda, $m(\angle ABC) = 2\alpha$ olduğundan $m(\angle AEB) = \alpha$ olur ve $|EB| = |AB| = 6$ elde edilir. $m(\angle BDA) = m(\angle DAE) = \alpha + \beta$ olduğundan $\triangle EAD$ üçgeni ikizkenardır ve $|EA| = 10$ olur. Diğer yandan $\triangle AEC$ üçgeni ikizkenar olduğundan$|AC| = |AE| = 10$ olur. Buna göre, $\triangle ABC$ üçgeninde açıortay teoremi uygulanırsa

$$\frac{6}{4} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

elde edilir. **Yanıt** : **D)** $\frac{20}{3}$

3. **9 puan - 9 points - 9 баллов - 9 xal**

3 Koordinat düzleminde $A = (0,0)$ ve $B = (216,144)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ doğru parçası üzerinde, tam sayı koordinatlara sahip kaç nokta vardır?

3 The points $A = (0,0)$ and $B = (216,144)$ are given on the coordinate plane. How many points with integer coordinates are there on the line segment $[AB]$?

3 На координатной плоскости заданы точки $A = (0,0)$ и $B = (216,144)$. Сколько точек с целочисленными координатами находится на отрезке $[AB]$?

3 Koordinat müstəvisində $A = (0,0)$ və $B = (216,144)$ nöqtələri verilmişdir. $[AB]$ xətt seqmentində tam koordinatlı neçə nöqtə var?

A) 73 **B)** 63 **C)** 64 **D)** 72 **E)** 62

Çözüm Verilen iki noktayı birleştiren doğru parçasının denklemi,

$$y = \frac{144}{216}x = \frac{2 \cdot 72}{3 \cdot 72}x = \frac{2}{3}x, \quad (0 \le x \le 216)$$

y'nin tam sayı olması için x sayısı

$$x = 0 \cdot 3, \ \ x = 1 \cdot 3, \ \ x = 2 \cdot 3, \ \ \ldots \ , \ \ x = 72 \cdot 3$$

değerlerini almalıdır. O halde, doğru parçası üzerinde 73 tam koordinatlı nokta vardır. **Yanıt : A) 73**

4. **9 puan - 9 points - 9 баллов - 9 xal**

4

$$\frac{x^5}{x^4 - 18} + \sqrt[4]{18 - x^4} = 0$$

denkleminin reel kökü a ise, $10(a-1)$ sayısının tam kısmı (tam değeri) aşağıdakilerden hangisidir?

4 If the real root of the equation

$$\frac{x^5}{x^4 - 18} + \sqrt[4]{18 - x^4} = 0$$

is a, which of the following is the integer part of the number $10(a-1)$?

4 Если действительный корень уравнения

$$\frac{x^5}{x^4 - 18} + \sqrt[4]{18 - x^4} = 0$$

равен a, то какое из следующих чисел является целой частью числа $10(a-1)$?

4

$$\frac{x^5}{x^4 - 18} + \sqrt[4]{18 - x^4} = 0$$

tənliyinin həqiqi kökü a isə, aşağıdakılardan hansı $10(a-1)$ ədədinin tam hissəsidir?

A) 7 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 0 **E)** 9

Çözüm $x^5 = (18 - x^4)(18 - x^4)^{\frac{1}{4}} = (18 - x^4)^{\frac{5}{4}}$.

Buradan, $x^4 = 18 - x^4 \Rightarrow x^4 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{3} . \sqrt{3} = 1{,}7\cdots$ olduğundan, $10(\sqrt{3} - 1) = 7{,}\cdots$ olup, $\lfloor 10(\sqrt{3} - 1) \rfloor = 7$ bulunur. **Yanıt : A) 7**

5. **9 puan - 9 points - 9 баллов - 9 xal**

5 Koordinat düzleminde

$$K = \{(x,y) | -30 \le x \le 30; \quad -30 \le y \le 30\}$$

kümesi verilsin. Bu kümede, $x^3y^2 = 4xy$ eşitliğini sağlayan kaç tane tam sayı koordinatlı (x,y) noktası vardır?

5 Let the set

$$K = \{(x,y) | -30 \le x \le 30; \quad -30 \le y \le 30\}$$

be given in the coordinate plane. How many points (x,y) with integer coordinates are there in this set that satisfy the equality $x^3y^2 = 4xy$?

5 Пусть на координатной плоскости задано множество

$$K = \{(x,y) | -30 \le x \le 30; \quad -30 \le y \le 30\}.$$

Сколько точек (x,y) с целочисленными координатами содержится в этом множестве, удовлетворяющих равенству $x^3y^2 = 4xy$?

5 Koordinat müstəvisində

$$K = \{(x,y) | -30 \le x \le 30; \quad -30 \le y \le 30\}$$

çoxluğu verilsin. Bu çoxluqda $x^3y^2 = 4xy$ bərabərliyini ödəyən neçə tam koordinatlı (x,y) nöqtəsi var?

A) 121 **B)** 135 **C)** 144 **D)** 125 **E)** 120

Çözüm 61 tane $(0,y)$ noktası ve 61 tane $(x,0)$ noktası eşitliği sağlar. $(0,0)$ iki defa sayıldığından, en az bir koordinatı sıfır olan ve eşitliği sağlayan noktalar sayısı 121'dir. Şimdi, $x \neq 0, y \neq 0$ olsun. Eşitliği şöyle yazabiliriz:

$$x^2y = 4.$$

Bu eşitliği sağlayan (x,y) çiftleri:

$$(1,4), (-1,4), (2,1), (-2,1)\text{'dir.}$$

Sonuç olarak, istenen özelliğe sahip $n = 125$ nokta vardır.

Yanıt : **D) 125**

6. **10 puan - 10 points - 10 баллов - 10 xal**

6 **A** kümesinin elemanlarının %65'i **B** kümesinin elemanı değildir. **B** kümesinin elemanlarının %55'i de **A** kümesinin elemanı değildir. Buna göre, **A** ∪ **B** kümesinin eleman sayısı en az kaç olabilir?

6 65% of the elements of set **A** are not elements of set **B**. 55% of the elements of set **B** are not elements of set **A**. What is the minimum number of elements that the set **A** ∪ **B** can have?

6 65% элементов множества **A** не являются элементами множества **B**. 55% элементов множества **B** не являются элементами множества **A**. Каково минимальное количество элементов в множестве **A** ∪ **B**?

6 **A** çoxluğunun elementlərinin 65%-i **B** çoxluğunun elementləri deyil. **B** çoxluğunun elementlərinin 55%-i **A** çoxluğunun elementləri deyil. **A** ∪ **B** çoxluğunda elementlərin minimum sayı neçə ola bilər?

A) 235 **B)** 265 **C)** 257 **D)** 253 **E)** 263

Çözüm

A kümesinin elemanlarının %65'i **B** kümesinin elemanı değilse %35'i elemanıdır. Yani, **A** ∩ **B** kümesinde **A** kümesinin elemanlarının %35'i bulunur.

B kümesinin elemanlarının %55'ı **A** kümesinin elemanı değilse %45'i elemanıdır. Yani, **A** ∩ **B** kümesinde **B** kümesinin elemanlarının %45'i bulunur.

Buna göre,

$$\frac{35}{100}\cdot s(\mathbf{A}) = \frac{45}{100}\cdot s(\mathbf{B}) \Rightarrow \frac{s(\mathbf{A})}{s(\mathbf{B})} = \frac{45k}{35k} = \frac{9k}{7k}$$

olacağından $s(\mathbf{A}) = 9k$ ve $s(\mathbf{B}) = 7k$ olur. Bu durumda,

$$s(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) = \frac{35}{100}\cdot s(\mathbf{A}) = \frac{35}{100}\cdot 9k = \frac{63k}{20}$$

olur ki, bu ifadenin tam sayı olması için k en az 20 olabilir. Buna göre,

$$s(\mathbf{A}) = 180,\ \ s(\mathbf{B}) = 140\ \text{ ve }\ s(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) = 63$$

elde edilir. Böylece, $S(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) = s(\mathbf{A}) + s(\mathbf{B}) - s(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) = 180 + 140 - 63 = 257$ bulunur. **Yanıt : C) 257**

7. **10 puan - 10 points - 10 баллов - 10 xal**

7 $13^{15!} + (15!)^{13}$ sayısının 17'ye bölümünden kalan kaçtır?

7 What is the remainder of dividing the number $13^{15!} + (15!)^{13}$ by 17?

7 Каков остаток при делении число $13^{15!} + (15!)^{13}$ на 17?

7 $13^{15!} + (15!)^{13}$ ədədini 17-yə böldükdə qalıq neçə olar?

A) 0 **B)** 2 **C)** 1 **D)** 3 **E)** 7

Çözüm Fermat teoreminden, $13^{15!} = 13^{16k} = (13^{16})^k \equiv 1^k(\text{mod}\,17) \equiv 1(\text{mod}\,17)15! \equiv x(\text{mod}\,17)$ olur. Buradan, $16! \equiv 16x(\text{mod}\,17) \equiv \cdots$(Wilson Teoremine göre)$\cdots \equiv (-1)(\text{mod}\,17)$. Buradan, $x \equiv 1(\text{mod}\,17)$ olur. O halde, $(15!)^{13} \equiv 1(\text{mod}\,17)$ ve sonuç olarak, $13^{15!} + (15!)^{13} \equiv 2(\text{mod}\,17)$.
Yanıt : B) 2

8. **10 puan - 10 points - 10 баллов - 10 xal**

8

$$|5x-30|+|2y-29| \leq \frac{5}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan (x,y) noktalarının oluşturduğu bölgenin alanı kaçtır?

8 What is the area of the region formed by the points (x,y) that satisfy the inequality

$$|5x-30|+|2y-29| \leq \frac{5}{2} \text{ ?}$$

8 Какова площадь области, образованной точками (x,y), удовлетворяющими неравенству

$$|5x-30|+|2y-29| \leq \frac{5}{2} \text{ ?}$$

8

$$|5x-30|+|2y-29| \leq \frac{5}{2}$$

bərabərsizliyini ödəyən (x,y) nöqtələrinin yaratdığı bölgənin sahəsi neçəyə bərabərdir?

A) $\frac{15}{8}$ **B)** $\frac{17}{8}$ **C)** $\frac{5}{4}$ **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** 5

Çözüm

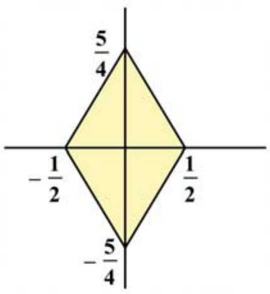
Bu şekli ötelediğimizde alanı değişmez. O halde,

$$x = x' + 6 \quad \text{ve} \quad y = y' + \frac{29}{2}$$

yazılırsa verilen eşitsizlik

$$|5x| + |2y| \leq \frac{5}{2}$$

biçimine dönüşür. Bu bölge eşkenar dörtgen şeklinde bir bölgedir. $y = 0$ ise $|x| \leq \frac{1}{2}$ ve $x = 0$ ise $|y| \leq \frac{5}{4}$ olduğundan aşağıdaki gibi olacaktır.



Bu bölgenin alanı ise köşegenlerinin çarpımının yarısıdır ve $\frac{1 \cdot (5/2)}{2} = \frac{5}{4}$ bulunur.

Yanıt : **C)** $\frac{5}{4}$

9. **11 puan - 11 points - 11 баллов - 11 xal**

9 a ve b pozitif sayılar olmak üzere, her $xy \neq 0$ için

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq 0$$

olsun. b sayısının olabileceği en büyük değer kaçtır?

9 Let

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq 0$$

for all $xy \neq 0$, where a and b are positive numbers. What is the largest possible value of the number b?

9 Пусть

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq 0$$

для всех $xy \neq 0$, где a и b — положительные числа. Каково наибольшее возможное значение числа b?

9 Bütün $xy \neq 0$ üçün,

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq 0$$

olsun. Burada a və b müsbət ədədlərdir. b ədədinin mümkün olan ən böyük qiyməti hansıdır?

A) 6 **B)** 4 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 8

Çözüm AGO eşitsizliğinden,

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq \frac{8}{|x||y|^3} + \frac{b}{xy^3}$$

olur. Buradan görülüyor ki, $b \leq 8$ olması durumunda

$$\frac{8}{|x||y|^3} + \frac{b}{xy^3} \geq 0$$

ve dolayısıyla

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq 0$$

olur. $b > 8$ olursa, örneğin, $x = 2a, y = -2$ alırsak, eşitsizlik yön değiştirir. Dolayısıyla, b en fazla 8 olabilir.

Yanıt : **E) 8**

10. **11 puan - 11 points - 11 баллов - 11 xal**

10 $P(x)$ ikinci dereceden bir polinom olsun. $P(-1) = -1$, $P(1) = 3$ ve $P(3) = 1$ ise, $P(P(x)) = x$ denkleminin tamsayı olmayan kökü aşağıdakilerden hangisidir?

10 Let $P(x)$ be a second degree polynomial. If $P(-1) = -1$, $P(1) = 3$ and $P(3) = 1$, which of the following is the non-integer root of the equation $P(P(x)) = x$?

10 Пусть $P(x)$ — многочлен второй степени. Если $P(-1) = -1$, $P(1) = 3$ и $P(3) = 1$, какой из следующих является нецелым корнем уравнения $P(P(x)) = x$?

10 $P(x)$ ikinci dərəcəli çoxhədli olsun. $P(-1) = -1$, $P(1) = 3$ və $P(3) = 1$ olarsa, aşağıdakılardan hansı $P(P(x)) = x$ tənliyinin tam olmayan köküdür?

A) $\frac{5}{3}$ **B)** $\frac{8}{3}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{7}{3}$ **E)** $\frac{3}{8}$

Çözüm $P(x) = ax^2 + bx + c$ formunda bir polinomdur. Fakat daima

$$P(x) = a(x+1)(x-1) + b(x+1)(x-3) + c(x-1)(x-3)$$

biçiminde de yazılabilir. $P(-1) = -1$, $P(1) = 3$ ve $P(3) = 1$ kullanılırsa,

$$P(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + \frac{7}{4}$$

bulunur. $P(P(x)) = x$ denkleminin üç kökü $x = -1, 1, 3$ tür. Dördüncü kök m olsun.

$$P(P(m)) = m \text{ ise } P(m) = m$$

olacaktır. $P(m) = n$ olsaydı, $P(n) = m$ olacak ve hem n hem de m kök olacaktı.

$$P(P(m)) = m \Rightarrow P(n) = m$$

2 tane daha kök elde edilecekti. O halde,

$$P(x) = x \Rightarrow -\frac{3}{4}x^2 + 2x + \frac{7}{4} = x \Rightarrow -\frac{3}{4}x^2 + x + \frac{7}{4} = 0$$

denkleminden $x = -1$ ve $x = \frac{7}{3}$ elde edilir. **Yanıt** : **D)** $\frac{7}{3}$

11. **11 puan - 11 points - 11 баллов - 11 xal**

11 $x_1 = x_2 = 1$ ve her $n = 2, 3, \ldots$ için $\dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{x_n}$ sağlanırsa,

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{99}x_{100}}$$

toplamı kaç olur?

11 If $x_1 = x_2 = 1$ and $\dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{x_n}$ for all $n = 2, 3, \ldots$, what is the sum of

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{99}x_{100}}?$$

11 Если $x_1 = x_2 = 1$ и $\dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{x_n}$ для всех $n = 2, 3, \ldots$, чему равна сумма

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{99}x_{100}}?$$

11 $x_1 = x_2 = 1$ ve bütün $n = 2, 3, \ldots$ ədədləri üçün $\dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{x_n}$ olarsa,

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{99}x_{100}}$$

cəmi neçə olar?

A) $\dfrac{91}{50}$ **B)** $\dfrac{99}{50}$ **C)** $\dfrac{97}{50}$ **D)** $\dfrac{93}{50}$ **E)** $\dfrac{103}{50}$

Çözüm Verilen bağıntıdan $n = 2, 3, \cdots$ için

$$x_n \cdot x_{n+1} - x_{n-1} \cdot x_n = n$$

bulunur. $x_{n-1} \cdot x_n = a_n$ dersek, $a_{n+1} - a_n = n$ olur.

$$a_3 - a_2 = 2;$$
$$a_4 - a_3 = 3;$$
$$\ldots$$
$$a_{n+1} - a_n = n$$

eşitlikleri toplanırsa,

$$a_{n+1} - a_2 = 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

ve $a_2 = x_1 \cdot x_2 = 1$ olduğuna göre,

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)(n-1)}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

olur. O halde,

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 2\left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\right]$$
$$= 2\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Buradan,

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{99}x_{100}} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{100}} = 2\left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{99}{50}$$

Yanıt : **B)** $\dfrac{99}{50}$

12. **12 puan - 12 points - 12 баллов - 12 xal**

12 2, 3, 4, 6, 9 rakamları ile, rakamları birbirinden farklı olan tüm beş basamaklı sayılar yazılıyor. Bu sayılardan 11 ile tam bölünemeyenlerin kümesi **M** olsun. Örneğin, $39264 \in \mathbf{M}$ olur. **M** kümesindeki bir **n** sayısının rakamları toplamını $S(\mathbf{n})$ ile gösterelim. Buna göre,

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{M}} S(\mathbf{n})$$

kaçtır?

12 Using the numbers 2, 3, 4, 6, 9, all five-digit numbers with different digits are written. Let **M** be the set of numbers that are not divisible by 11. For example, $39264 \in \mathbf{M}$. Let $S(\mathbf{n})$ represent the sum of the digits of a number **n** in set **M**. What is the sum of

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{M}} S(\mathbf{n})?$$

12 Все пятизначные числа с разными цифрами записываются с помощью цифр 2, 3, 4, 6, 9. Пусть **M** — множество чисел, которые не делятся на 11. Например, $39264 \in \mathbf{M}$. Обозначим сумму цифр числа **n** из множества **M** через $S(\mathbf{n})$. Какова сумма

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{M}} S(\mathbf{n})?$$

12 2, 3, 4, 6, 9 rəqəmlərindən istifadə etməklə, rəqəmləri müxtəlif olan bütün beşrəqəmli ədədlər yazılır. Bu ədədlər içində 11-ə bölünməyənlərin çoxluğu **M** olsun. Məsələn, $39264 \in \mathbf{M}$ olar. **M** çoxluğundakı hərhansı **n** ədədinin rəqəmlərinin cəmini $S(\mathbf{n})$ ilə göstərək.

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{M}} S(\mathbf{n})$$

cəmi neçədir?

A) 2592 **B**) 2448 **C**) 2736 **D**) 2364 **E**) 2304

Çözüm Bu beş sayı ile oluşturulan bir sayının 11 ile bölünebilmesi için soldan tek sırada olanlar $2, 4, 6$ ve çift sırada olanlar $3,\ 9$'dur. Çünkü, $2+4+6 = 3+9$.

Buna göre, problemi çözmek için bu rakamlardan oluşan tüm beş basamaklı sayıların rakamları toplamından, 11 ile bölünenlerin rakamları toplamını çıkarmak yeterlidir.

Beş rakamlı tüm sayılardaki rakamların toplamı

$$5!(2+3+4+6+9) = 2880$$

olur. 11 ile bölünen sayıların rakamları toplamı ise

$$12(2+3+4+6+9) = 288$$

olduğundan istenen yanıt : $2880 - 288 = 2592$ bulunur.

Yanıt : **A) 2592**

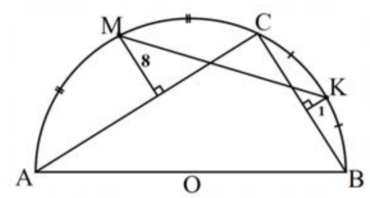
13. **12 puan - 12 points - 12 баллов - 12 xal**

13 $[AB]$ çaplı yarım çember yayı üzerinde bir C noktası alınıyor. AC yayının orta noktası M ve BC yayının orta noktası da K olsun. M noktasından $[AC]$ kirişine çizilen dikmenin uzunluğu 8 ve K noktasından $[BC]$ kirişine çizilen dikmenin uzunluğu da 1 olsun. $|MK|$ kirişinin uzunluğu kaçtır?

13 A point C is taken on the semicircular arc of diameter $[AB]$. Let the midpoint of arc AC be M and the midpoint of arc BC be K. Let the length of the perpendicular drawn from point M to chord $[AC]$ be 8 and the length of the perpendicular drawn from point K to chord $[BC]$ be 1. What is the length of chord $|MK|$?

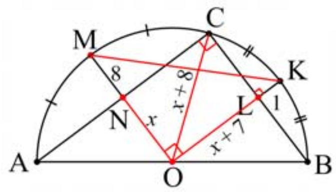
13 На дуге полуокружности диаметра $[AB]$ взята точка C. Пусть середина дуги AC будет M, а середина дуги BC — K. Пусть длина перпендикуляра, проведенного из точки M к хорде $[AC]$, равна 8, а длина перпендикуляра, проведенного из точки K к хорде $[BC]$, равна 1. Какова длина хорды $|MK|$?

13 $[AB]$ diametrli yarımdairəvi qövsdə C nöqtəsi verilsin. AC qövsünün orta nöqtəsi M, BC qövsünün orta nöqtəsi isə K olsun. M nöqtəsindən $[AC]$ vətərinə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğu 8, K nöqtəsindən $[BC]$ vətərinə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğu 1 olsun. $|MK|$ vətərinin uzunluğu neçədir?



A) $11\sqrt{2}$ **B)** $15\sqrt{2}$ **C)** $14\sqrt{2}$ **D)** $13\sqrt{2}$ **E)** $9\sqrt{2}$

Çözüm



$$(x+7)^2 + x^2 = (x+8)^2 \Rightarrow x = 5$$

$x = 5$ ve $r = 13$ bulunur. $\triangle OMK$ ikizkenar dik üçgeninde $|MK| = 13\sqrt{2}$ elde edilir.

Yanıt : **D)** $13\sqrt{2}$

14. **12 puan - 12 points - 12 баллов - 12 xal**

14 Gökhan tahtaya ilk 50 pozitif tam sayının karelerini sırasıyla yazarak aşağıdaki sayı dizisini elde ediyor : $1^1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots, 49^2, 50^2$. Nihan ise, 1'den sonraki tüm virgülleri ikişerli olarak eksi $(-)$ ve artı $(+)$ işaretleriyle değiştiriyor. Elde edilen
$1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 48^2 + 49^2 - 50^2$ işleminin sonucu kaçtır?

14 Gökhan writes the squares of the first 50 positive integers in order on the board and obtains the following numerical sequence: $1^1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots, 49^2, 50^2$. Nihan then replaces all the commas after 1 with minus $(-)$ and plus $(+)$ signs in pairs. What is the result of the operation
$1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 48^2 + 49^2 - 50^2$?

14 Гёкхан записывает на доске квадраты первых 50 положительных целых чисел по порядку и получает следующую числовую последовательность: $1^1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots, 49^2, 50^2$. Затем Нихан заменяет все запятые после 1 на знаки минус $(-)$ и плюс $(+)$ попарно. Каков результат действия
$1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 48^2 + 49^2 - 50^2$?

14 Gökhan ilk 50 müsbət tam ədədin kvadratlarını lövhədə ardıcıllıqla yazır və aşağıdakı ədədi ardıcıllığı alır: $1^1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots, 49^2, 50^2$. Nihan isə, 1-dən sonra bütün vergülləri cüt-cüt mənfi $(-)$ və müsbət $(+)$ işarələri ilə əvəz edir. Əldə edilən
$1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 48^2 + 49^2 - 50^2$ ifadəsinin nəticəsi nədir?

A) 39 **B)** -52 **C)** -51 **D)** 43 **E)** -43

Çözüm

$$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4$$

olduğunu kullanacağız. Buna göre,

$$\begin{aligned}
1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 &= 4, \\
5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 &= 4, \\
&\ldots \\
45^2 - 46^2 - 47^2 + 48^2 &= 4 \\
49^2 - 50^2 &= -99
\end{aligned}$$

olduğundan, $\dfrac{45-1}{4} + 1 = 12$ olduğu da göz önüne alınırsa,

$$12 \cdot 4 - 99 = -51$$

elde edilir. **Yanıt** : **C) -51**

15. **13 puan - 13 points - 13 баллов - 13 xal**

15 $S = \{1,2,3,\ldots,2025\}$ kümesinden rastgele $a,\ b$ ve c elemanları seçiliyor.

$$a \cdot b \cdot c + a \cdot b + 2024 \cdot a$$

değerinin 5 ile tam bölünme olasılığı kaçtır?

15 The elements a, b and c are randomly selected from the set $S = \{1,2,3,\ldots,2025\}$. What is the probability that

$$a \cdot b \cdot c + a \cdot b + 2024 \cdot a$$

is divisible by 5?

15 Элементы a, b и c случайным образом выбираются из множества $S = \{1,2,3,\ldots,2025\}$. Какова вероятность того, что значение выражения

$$a \cdot b \cdot c + a \cdot b + 2024 \cdot a$$

будет делиться на 5 без остатка?

15 a, b və c elementləri $S = \{1,2,3,\ldots,2025\}$ çoxluğundan təsadüfi seçilir.

$$a \cdot b \cdot c + a \cdot b + 2024 \cdot a$$

ədədinin 5-ə bölünmə ehtimalı nədir?

A) $\frac{31}{125}$ **B)** $\frac{39}{125}$ **C)** $\frac{37}{125}$ **D)** $\frac{43}{125}$ **E)** $\frac{41}{125}$

Çözüm

$$abc + ab + 2024a = a(bc + b + 2024)$$

eşitliğine göre a sayısını 5'in katı ise bu çarpım 5 ile tam bölünür. S kümesinden seçilen bir elemanın 5 ile bölünebilme olasılığı $\frac{1}{5}$'tir. Eğer a sayısı 5'in katı değilse ki bunun olasılığı $\frac{4}{5}$ tir. Bu durumda, $bc + b + 2024$ ifadesi 5 ile bölünmelidir.

$$bc + b + 4 \equiv 0 (\bmod 5) \Rightarrow b(c+1) \equiv 1 (\bmod 5)$$

olduğundan dört durum söz konusudur.

i) $b \equiv 1 (\bmod 5)$ ve $c + 1 \equiv 1 (\bmod 5)$
ii) $b \equiv 4 (\bmod 5)$ ve $c + 1 \equiv 4 (\bmod 5)$
iii) $b \equiv 2 (\bmod 5)$ ve $c + 1 \equiv 3 (\bmod 5)$
iv) $b \equiv 3 (\bmod 5)$ ve $c + 1 \equiv 2 (\bmod 5)$

Her dört durumun da olasılığı $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ olduğundan, a sayısının 5'in katı olmaması durumunda $abc + ab + 2024a$ değerinin 5 ile bölünme olasılığı

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{25} = \frac{16}{125}$$

bulunur. O halde, istenen olasılık $\frac{16}{125} + \frac{1}{5} = \frac{41}{125}$ bulunur.

Yanıt : **E)** $\frac{41}{125}$

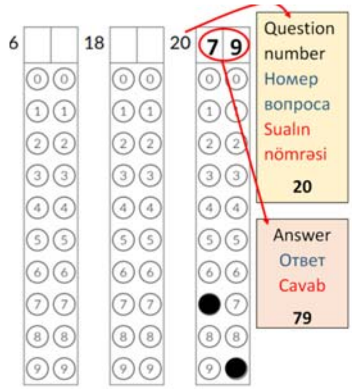
UAMO 2025 - FINAL 11. SINIF - 11th GRADE - 11. КЛАСС - 11. SİNİF

Questions with no answer choises - вопросы без вариантов ответа- cavab variantları olmayan suallar.

The answers to questions 16, 17, 18, 19 and 20 are two-digit positive numbers. After solving these questions, find the number of the question in the optical form and code the two-digit number.

Ответы на вопросы 16, 17, 18, 19 и 20 — двузначные положительные числа. Решив эти вопросы, найдите номер вопроса в оптической форме и закодируйте двузначное число.

16, 17, 18, 19 və 20-ci sualların cavabları ikirəqəmli müsbət ədədlərdir. Bu sualları həll etdikdən sonra optik formada sualın nömrəsini tapın və ikirəqəmli rəqəmi kodlayın.



16. **15 puan - 15 points - 15 баллов - 15 xal**

16 Bir abc üç basamaklı sayısı için $P_n(abc) = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ olsun. Örneğin, $P_3(512) = 5^3 \cdot 1^3 \cdot 2^3 = 1000$. Buna göre,

$$P_3(111) + P_3(112) + P_3(113) + \cdots + P_3(998) + P_3(999)$$

toplamının pozitif bölen sayısı kaçtır?

16 Let $P_n(abc) = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ for a three-digit number abc. For example, $P_3(512) = 5^3 \cdot 1^3 \cdot 2^3 = 1000$. What is the number of positive divisors of the sum

$$P_3(111) + P_3(112) + P_3(113) + \cdots + P_3(998) + P_3(999)\ ?$$

16 Пусть для трехзначного числа abc, $P_n(abc) = a^n \cdot b^n \cdot c^n$. Например, $P_3(512) = 5^3 \cdot 1^3 \cdot 2^3 = 1000$. Каково количество положительных делителей суммы

$$P_3(111) + P_3(112) + P_3(113) + \cdots + P_3(998) + P_3(999)\ ?$$

16 Üçrəqəmli abc ədədi üçün $P_n(abc) = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ olsun. Məsələn, $P_3(512) = 5^3 \cdot 1^3 \cdot 2^3 = 1000$.

$$P_3(111) + P_3(112) + P_3(113) + \cdots + P_3(998) + P_3(999)$$

cəminin müsbət bölənlərinin sayı neçədir?

Çözüm

$$S = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3)(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3)(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3)$$
$$= \left(\frac{9 \cdot 10}{2}\right)^6 = 3^{12}5^6$$

olduğundan, pozitif bölen sayısı $13 \cdot 7 = 91$ olur. **Yanıt** : **91**

17. **15 puan - 15 points - 15 баллов - 15 xal**

17 Bir f fonksiyonu her reel x için, $f(101 - x) = f(x)$ ve $f(70 - x) = f(x + 30)$ eşitliklerini sağlamaktadır. Eğer $f(3) + f(5) + f(15) = 57$ ise, $f(2) + f(4) + f(8) + f(16)$ toplamı kaçtır?

17 Let a function f satisfy the equations $f(101 - x) = f(x)$ and $f(70 - x) = f(x + 30)$ for all real x. If $f(3) + f(5) + f(15) = 57$, what is the sum of $f(2) + f(4) + f(8) + f(16)$?

17 Пусть функция f удовлетворяет уравнениям $f(101 - x) = f(x)$ и $f(70 - x) = f(x + 30)$ для всех действительных x. Если $f(3) + f(5) + f(15) = 57$, чему равна сумма $f(2) + f(4) + f(8) + f(16)$?

17 f funksiyası bütün real x ədədləri üçün $f(101 - x) = f(x)$ və $f(70 - x) = f(x + 30)$ tənliklərini ödəsin. Əgər $f(3) + f(5) + f(15) = 57$ olarsa, $f(2) + f(4) + f(8) + f(16)$ cəmi neçəyə bərabərdir?

Çözüm İkinci eşitlikte x yerine $(x - 30)$ yazarsak, $f(x) = f(100 - x)$ olur. Birinci denklemle kıyaslarsak, her x için

$$f(101 - x) = f(100 - x)$$

olur. $x = -y + 100$ yazarsak, her y için

$$f(y + 1) = f(y)$$

olur. Yani, f periyodu 1 olan periyodik fonksiyondur. O halde, $f(1) = a$ dersek, her $k \in \mathbb{Z}$ için $f(k) = a$ olur. Verilen koşuldan,

$$3a = 57 \Rightarrow a = 19$$

bulunur. O halde,

$$f(2) + f(4) + f(8) + f(16) = 4 \cdot 19 = 76$$

elde edilir.

Yanıt :**76**

18. **15 puan - 15 points - 15 баллов - 15 xal**

18 Her x reel sayısı için,

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-10)(x-11) = x^{11} + ax^{10} + bx^9 + \cdots + cx + d$$

eşitliği sağlanırsa, b katsayısının pozitif bölen sayısı kaçtır?

18 If the equality

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-10)(x-11) = x^{11} + ax^{10} + bx^9 + \cdots + cx + d$$

holds for each real number x, then what is the number of positive divisors of the coefficient b?

18 Если для каждого действительного числа x выполняется равенство

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-10)(x-11) = x^{11} + ax^{10} + bx^9 + \cdots + cx + d$$

то каково количество положительных делителей коэффициента b?

18 Əgər

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-10)(x-11) = x^{11} + ax^{10} + bx^9 + \cdots + cx + d$$

bərabərliyi hər x həqiqi ədədi üçün ödənirsə, b əmsalının müsbət bölənlərinin sayı neçədir?

Çözüm Vieta formülüne göre, b katsayısı köklerin ikişerli çarpımlar toplamıdır. O halde,

$$\begin{aligned}
b &= \frac{1}{2}[(1+2+\cdots+11)^2 - (1^2+2^2+\cdots+11^2)] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{11\cdot 12}{2}\right)^2 - \frac{11\cdot 12\cdot 23}{6}\right] \\
&= \frac{1}{2}[66^2 - 11\cdot 46] \\
&= \frac{1}{2}\cdot 11\cdot[11\cdot 36 - 46] \\
&= \frac{1}{2}\cdot 11(396-46) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 11\cdot 350 \\
&= 11\cdot 175 \\
&= 5^2\cdot 7\cdot 11
\end{aligned}$$

Yanıt : $3\cdot 2\cdot 2 = 12$.

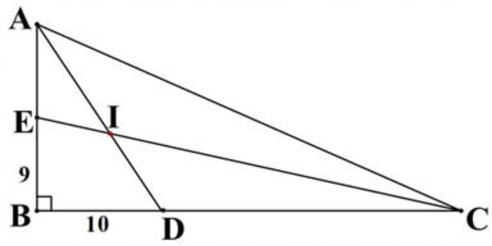
19. **15 puan - 15 points - 15 баллов - 15 xal**

19 $m(\angle B) = 90^\circ$ olan ABC dik üçgeninde A ve C köşelerinden çizilen iç açıortaylar BC ve AB kenarlarını sırasıyla D ve E noktalarında kesmektedir. $|EB| = 9$ ve $|BD| = 10$ ise ABC üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapının karesi kaçtır?

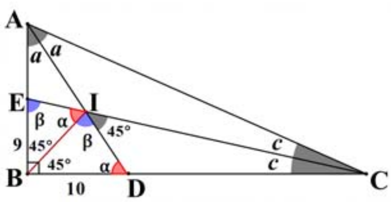
19 In the right triangle ABC with $m(\angle B) = 90^\circ$, the angle bisectors drawn from the vertices A and C intersect the sides BC and AB at points D and E, respectively. If $|EB| = 9$ and $|BD| = 10$, what is the square of the radius of the inscribed circle of triangle ABC?

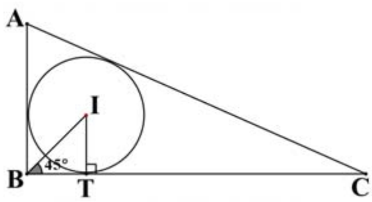
19 В прямоугольном треугольнике ABC с $m(\angle B) = 90^\circ$ биссектрисы, проведенные из вершин A и C, пересекают стороны BC и AB в точках D и E соответственно. Если $|EB| = 9$ и $|BD| = 10$, чему равен квадрат радиуса вписанной окружности треугольника ABC?

19 $m(\angle B) = 90^\circ$ olan ABC düzbucaqlı üçbucağında A və C təpələrindən çəkilmiş tənbölənləri BC və AB tərəflərini, müvafiq olaraq, D və E nöqtələrində kəsir. Əgər $|EB| = 9$ və $|BD| = 10$ olarsa, ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrəsinin radiusunun kvadratı neçəyə bərabərdir?



Çözüm





$m(\angle BAD) = a$ ve $m(\angle ECB) = c$ olsun. $2a + 2c = 90^\circ$ ve $a + c = 45^\circ$ olur. $m(\angle CID) = a + c = 45^\circ$ (AIC üçgeninde dış açı) ve I noktası iki iç açıortayın kesim noktası olduğundan iç teğet çemberin merkezidir. $[BI]$ çizilirse $m(\angle EBI) = m(\angle IBD) = 45^\circ$ olur. AÇı takibi yapılırsa, $m(\angle BEI) = m(\angle BID) = \beta$ ve $m(\angle BIE) = m(\angle BDI) = \alpha$ olur. Bu durumda,

$$\triangle EBI \sim \triangle IBD$$

benzerliği elde edilir. Benzerlik oranları kullanılarak

$$\frac{|BI|}{9} = \frac{10}{|BI|}$$

eşitliğinden $|BI|^2 = 90$ olur. $r^2 + r^2 = 90$ eşitliğinden, $r^2 = |IT| = 45$ elde edilir.

Yanıt : **45**

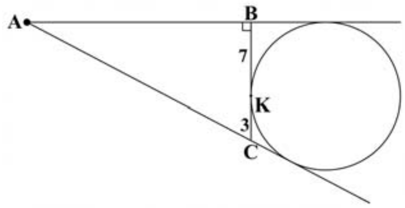
20. **15 puan - 15 points - 15 баллов - 15 xal**

20 ABC dik üçgeninde $m(\angle B) = 90^\circ$ olsun. BC kenarına dıştan teğet olan dış teğet çemberin bu kenara değme noktası K olsun. $|KC| = 3$ ve $|BK| = 7$ ise, ABC üçgeninin çevre uzunluğu kaçtır?

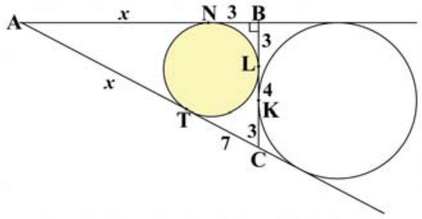
20 Let $m(\angle B) = 90^\circ$ in the right triangle ABC. Let the point of contact of the externally tangent circle to the side BC be K. If $|KC| = 3$ and $|BK| = 7$, what is the perimeter of the triangle ABC?

20 Пусть $m(\angle B) = 90^\circ$ в прямоугольном треугольнике ABC. Пусть точка касания внешней касательной окружности к стороне BC будет K. Если $|KC| = 3$ и $|BK| = 7$, каков периметр треугольника ABC?

20 ABC düzbucaqlı üçbucağında $m(\angle B) = 90^\circ$ olsun. BC tərəfinə xaricdən toxunan çevrənin təmas nöqtəsi K olsun. Əgər $|KC| = 3$ və $|BK| = 7$ olarsa, ABC üçbucağının perimetri neçəyə bərabərdir?



Çözüm



ABC üçgeninde iç teğet çemberin AC, BC ve AB kenarına teğet olduğu noktalar sırasıyla T, L ve N olmak üzere,

$$|NB| = |BL| = |KC| = 3$$

ve

$$|CL| = |CT| = 7$$

olur. $|AN| = |AT| = x$ alınarak, ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$|BC|^2 + |AB|^2 = |AC|^2 \Rightarrow 10^2 + (x+3)^2 = (x+7)^2$$

eşitliğinden $x = \dfrac{15}{2}$ bulunur. O halde, ABC üçgeninin çevresi $15 + 6 + 14 = 35$ olur.

Yanıt : 35

2025

Questions and Points

1	E	**11**	B
2	D	**12**	A
3	A	**13**	D
4	A	**14**	C
5	D	**15**	E
6	C	**16**	91
7	B	**17**	76
8	C	**18**	12
9	E	**19**	45
10	D	**20**	35

1	8 points	**11**	11 points
2	8 points	**12**	12 points
3	9 points	**13**	12 points
4	9 points	**14**	12 points
5	9 points	**15**	13 points
6	10 points	**16**	15 points
7	10 points	**17**	15 points
8	10 points	**18**	15 points
9	11 points	**19**	15 points
10	11 points	**20**	15 points

DESTEKLEYENLER