2025
ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI

FİNAL SINAVI

10. SINIF SORU KİTAPÇIĞI

ADI SOYADI : ....
OKUL .... SINIF : ....
İMZA : ....

Optik Formu Kodlarken Dikkat Edilmesi Gerekenler :

★ Optik forma **Final sınav kodunuzu** doğru girmeniz gerekmektedir. Aksi halde sistem değerlendirmeye almaz ve sınavınız geçersiz sayılır.

★ Optik form kağıdının üzerinde **yanıtlardan başka karalama yapılması sınavı geçersiz yapacaktır**. O yüzden sadece cevapları kodlayınız ve başka bir işaretleme yapmayınız.

★ Bu sınavda 15 adet **çoktan seçmeli**, 5 adet **açık uçlu soru** bulunmaktadır. Soruların puanları eşit değildir ve her sorunun yanında puanı belirtilmiştir. Optik formdaki ilgili kutucuklar tamamen doldurulmadır.

★ **Açık uçlu soruların yanıtları iki basamaklıdır**. Optik formda çözülen sorunun numarası bulunarak, sorunun yanıtı 2 sütundan oluşan optiğe kodlanmalıdır.

★ **Sınav süresi** 90 **dakikadır**. Kitapçıklardaki cevaplar değerlendirilmeyecek, sadece optik formdaki cevaplar değerlendirilecektir. Süreniz bitmeden tüm cevaplarınızı optik forma işaretlemeyi unutmayınız.

★ **Yanlış veya boş bırakılan soruların puan hesaplamasında olumlu ya da olumsuz bir etkisi olmayacaktır**. Fakat aynı puanı alan öğrencilerden yanlış sayısı az olan sıralamada öne geçecektir.

Kurallar

1. Cep telefonu ile sınava girmek yasaktır.
2. Sorularda hata olduğunu düşünseniz bile, sınav süresince gözetmen öğretmenlere hiç bir şekilde soru sorulmamalı, yorum yapılmamalıdır. Sınav sonunda yapılacak itirazlar jüri tarafından değerlendirilecektir.
2. İlk 60 dakika sınavdan çıkmak yasaktır. Dışarıya çıkan bir aday tekrar sınava alınmayacaktır.
3. Sınav salonundan ayrılmadan önce cevap kağıdınızı görevlilere teslim etmeyi unutmayınız. Kitapçıklar sizde kalacaktır.

1. **8 Puan - 8 Points - 8 баллов - 8 xal**

1 Rakamları çarpımı 36 olan dört basamaklı pozitif sayılardan kaç tanesinin **en az** iki rakamı eşittir?

1 How many four-digit positive numbers have at least two equal digits if the product of their digits is 36?

1 Сколько четырехзначных положительных чисел имеют хотя бы две одинаковые цифры, если произведение их цифр равно 36?

1 Rəqəmlərinin hasili 36 olan neçə dənə dördrəqəmli müsbət ədədin ən azı iki rəqəmi bərabərdir?

A) 30 **B**) 48 **C**) 36 **D**) 42 **E**) 54

Çözüm 36 rakamların çarpımı olarak

$$36 = 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 9 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 = 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6$$

biçiminde yazılabilir.

Buna göre, $1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 9$ rakamları ile $\frac{4!}{2!} = 12$ sayı yazılabilir.

Benzer şekilde, $1,2,2,9$; $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$ rakamlarıyla da 12'şer sayı yazılabilir.

$2,2,3,3$ ve $1,1,6,6$ rakam gruplarının her biri için de $\frac{4!}{2!2!} = 6$ sayı yazılabilir.

O halde, istenen şekilde $3 \cdot 12 + 2 \cdot 6 = 48$ sayı yazılabilir. **Yanıt** : **B) 48**

2. ______________________ ______________________8 Puan - 8 Points - 8 баллов - 8 xal

2 ABC üçgeninde A'dan çizilen iç açıortay $[BC]$ kenarını D noktasında kesmektedir.

$$m(\angle ABC) = 2 \cdot m(\angle ACB), \ \ |BD| = 4, \ \ |AB| = 6$$

olduğuna göre $|DC|=$?

2 In triangle ABC, the internal angle bisector drawn from A intersects the side $[BC]$ at point D. If |

$$m(\angle ABC) = 2 \cdot m(\angle ACB), \ \ |BD| = 4, \ \ |AB| = 6,$$

what is $|DC|$?

2 В треугольнике ABC биссектриса, проведенная из точки A, пересекает сторону $[BC]$ в точке D. Если

$$m(\angle ABC) = 2 \cdot m(\angle ACB), \ \ |BD| = 4, \ \ |AB| = 6,$$

то $|DC|=$?

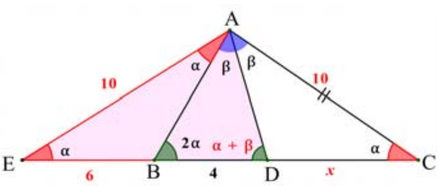
2 ABC üçbucağında A-dan çəkilmiş tənbölən $[BC]$ tərəfi ilə D nöqtəsində kəsişir. Əgər

$$m(\angle ABC) = 2 \cdot m(\angle ACB), \ \ |BD| = 4, \ \ |AB| = 6,$$

isə, $|DC|=$?

A) $\frac{21}{4}$ **B)** 6 **C)** $\frac{19}{4}$ **D)** 7 **E)** $\frac{20}{3}$

Çözüm



$|AB| = |EB|$ ve $m(\angle BAE) = m(\angle ACB) = \alpha$ olacak şekilde $[CB$ ışını üzerinde bir E noktası alalım. Bu durumda, $m(\angle ABC) = 2\alpha$ olduğundan $m(\angle AEB) = \alpha$ olur ve $|EB| = |AB| = 6$ elde edilir. $m(\angle BDA) = m(\angle DAE) = \alpha + \beta$ olduğundan $\triangle EAD$ üçgeni ikizkenardır ve $|EA| = 10$ olur. Diğer yandan $\triangle AEC$ üçgeni ikizkenar olduğundan$|AC| = |AE| = 10$ olur. Buna göre, $\triangle ABC$ üçgeninde açıortay teoremi uygulanırsa

$$\frac{6}{4} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

elde edilir. **Yanıt** : **E)** $\frac{20}{3}$

3. **9 Puan - 9 Points - 9 баллов - 9 xal**

3 **A** kümesinin elemanlarının %65'i **B** kümesinin elemanı değildir. **B** kümesinin elemanlarının %55'i de **A** kümesinin elemanı değildir. Buna göre, **A** ∪ **B** kümesinin eleman sayısı en az kaç olabilir?

3 65% of the elements of set **A** are not elements of set **B**. 55% of the elements of set **B** are not elements of set **A**. What is the minimum number of elements that the set **A** ∪ **B** can have?

3 65% элементов множества **A** не являются элементами множества **B**. 55% элементов множества **B** не являются элементами множества **A**. Каково минимальное количество элементов в множестве **A** ∪ **B**?

3 **A** çoxluğunun elementlərinin 65%-i **B** çoxluğunun elementləri deyil. **B** çoxluğunun elementlərinin 55%-i **A** çoxluğunun elementləri deyil. **A** ∪ **B** çoxluğunda elementlərin minimum sayı neçə ola bilər?

A) 265 **B)** 257 **C)** 235 **D)** 253 **E)** 263

Çözüm A kümesinin elemanlarının %65'i B kümesinin elemanı değilse %35'i elemanıdır. Yani, $A \cap B$ kümesinde A kümesinin elemanlarının %35'i bulunur. B kümesinin elemanlarının %55'ı A kümesinin elemanı değilse %45'i elemanıdır. Yani, $A \cap B$ kümesinde B kümesinin elemanlarının %45'i bulunur. Buna göre,

$$\frac{35}{100} \cdot s(\mathbf{A}) = \frac{45}{100} \cdot s(\mathbf{B}) \Rightarrow \frac{s(\mathbf{A})}{s(\mathbf{B})} = \frac{45k}{35k} = \frac{9k}{7k}$$

olacağından $s(\mathbf{A}) = 9k$ ve $s(\mathbf{B}) = 7k$ olur. Bu durumda,

$$s(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \frac{35}{100} \cdot s(\mathbf{A}) = \frac{35}{100} \cdot 9k = \frac{63k}{20}$$

olur ki, bu ifadenin tam sayı olması için k en az 20 olabilir. Buna göre, $s(\mathbf{A}) = 180,\ \ s(\mathbf{B}) = 140$ ve $s(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 63$ elde edilir. Böylece, $S(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = s(\mathbf{A}) + s(\mathbf{B}) - s(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = 180 + 140 - 63 = 257$ bulunur.
Yanıt : B) 257

4. **9 Puan - 9 Points - 9 баллов - 9 xal**

4 Altı basamaklı bir sayının sağdan ilk rakamı 7'dir ve bu rakam silinip sayının en soluna yazılınca yeni elde edilen sayı, ilk sayının 4 katı oluyor. Bu sayının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

4 The first digit from the right of a six-digit number is 7, and when this digit is deleted and written to the left of the number, the new number obtained is 4 times the first number. What is the remainder when this number is divided by 9?

4 Первая цифра справа в шестизначном числе — 7, и если эту цифру вычеркнуть и записать слева от числа, то полученное новое число будет в 4 раза больше первого числа. Какой остаток получится при делении этого числа на 9?

4 Altı rəqəmli ədədin ən sağındakı rəqəm 7-dir və bu rəqəm silinib ədədin ən soluna yazılarsa yeni alınan ədəd birinci ədədin 4 misli olur. Bu ədəd 9-a bölünəndə qalıq neçə olar?

A) 8 **B)** 1 **C)** 0 **D)** 7 **E)** 5

Çözüm İlk sayı m beş basamaklı bir sayı olmak üzere $10m + 7$ şeklinde yazılabilir. Sonraki sayı ise $7 \cdot 10^5 + m$ şeklinde yazılabilir. Problemin ifadesinden $4(10m + 7) = (7 \cdot 10^5 + m) \Rightarrow 39m = 7 \cdot 10^5 - 28 \Rightarrow$ $39m = 699972 \Rightarrow 13m = 233324 \Rightarrow m = 17948$ olur. O halde, ilk sayı 179487 olur. Bu sayının 9 ile bölümünden kalan da 0 olur. Yanıt : C) 0

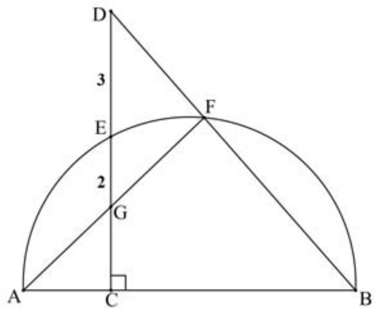
5. **9 Puan - 9 Points - 9 баллов - 9 xal**

5 Aşağıdaki şekilde $[AB]$ çaplı yarım çember verilmiştir. $[DC] \perp [AB]$, $|DE| = 3$ ve $|EG| = 2$ olduğuna göre, $|GC| = ?$

5 In the figure below, if $[DC] \perp [AB]$, $|DE| = 3$ and $|EG| = 2$ in the semicircle with diameter $[AB]$, what is $|GC|$?

5 На рисунке ниже показан полукруг с диаметром $[AB]$. Если $[DC] \perp [AB]$, $|DE| = 3$ и $|EG| = 2$, то $|GC|= ?$

5 Aşağıdakı şəkildə $[AB]$ diametrli yarımdairədə $[DC] \perp [AB]$, $|DE| = 3$ və $|EG| = 2$ olarsa, $|GC| = ?$



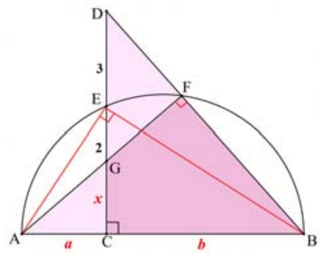
A) $\frac{10}{3}$ **B)** $\frac{7}{2}$ **C)** 3 **D)** $\frac{9}{2}$ **E)** 4

Çözüm

AEB üçgeninde Öklit teoreminden $(2+x)^2 = a \cdot b$ olur. ACG ve DCB üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{5+x}{b} = \frac{a}{x} \Rightarrow a \cdot b = x \cdot (5+x) \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 5x + x^2$$

ve buradan da $|GC| = x = 4$ elde edilir.



Yanıt : **E) 4**

6. **10 Puan - 10 Points - 10 баллов - 10 xal**

6 $13^{15!} + (15!)^{13}$ sayısının 17'ye bölümünden kalan kaçtır?

6 What is the remainder of dividing the number $13^{15!} + (15!)^{13}$ by 17?

6 Каков остаток при делении число $13^{15!} + (15!)^{13}$ на 17?

6 $13^{15!} + (15!)^{13}$ ədədini 17-yə böldükdə qalıq neçə olar?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 7

Çözüm Fermat teoreminden,

$$13^{15!} = 13^{16k} = (13^{16})^k \equiv 1^k (\bmod 17) \equiv 1 (\bmod 17)$$

$15! \equiv x (\bmod 17)$ olsun.

Buradan, $16! \equiv 16x (\bmod 17) \equiv \cdots$(Wilson Teoremine göre)$\cdots \equiv (-1)(\bmod 17)$. Buradan, $x \equiv 1 (\bmod 17)$ olur. O halde, $(15!)^{13} \equiv 1 (\bmod 17)$ ve sonuç olarak,

$$13^{15!} + (15!)^{13} \equiv 2 (\bmod 17)$$

Yanıt : **C) 2**

7. **10 Puan - 10 Points - 10 баллов - 10 xal**

7 Koordinat düzleminde $A = (0,0)$ ve $B = (216,144)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ doğru parçası üzerinde, tam sayı koordinatlara sahip kaç nokta vardır?

7 The points $A = (0,0)$ and $B = (216,144)$ are given on the coordinate plane. How many points with integer coordinates are there on the line segment $[AB]$?

7 На координатной плоскости заданы точки $A = (0,0)$ и $B = (216,144)$. Сколько точек с целочисленными координатами находится на отрезке $[AB]$?

7 Koordinat müstəvisində $A = (0,0)$ və $B = (216,144)$ nöqtələri verilmişdir. $[AB]$ xətt seqmentində tam koordinatlı neçə nöqtə var?

A) 62 **B)** 63 **C)** 64 **D)** 72 **E)** 73

Çözüm Verilen iki noktayı birleştiren doğru parçasının denklemi,

$$y = \frac{144}{216}x = \frac{2 \cdot 72}{3 \cdot 72}x = \frac{2}{3}x, \quad (0 \leq x \leq 216)$$

y'nin tam sayı olması için x sayısı

$$x = 0 \cdot 3,\ x = 1 \cdot 3,\ \ x = 2 \cdot 3,\ \ \cdots,\ \ x = 72 \cdot 3$$

değerlerini almalıdır. O halde, doğru parçası üzerinde 73 tam koordinatlı nokta vardır.

Yanıt : **E) 73**

8. **10 Puan - 10 Points - 10 баллов - 10 xal**

8

$$\frac{x^5}{x^4-18} + \sqrt[4]{18-x^4} = 0$$

denkleminin reel kökü a ise, $10(a-1)$ sayısının tam kısmı (tam değeri) aşağıdakilerden hangisidir?

8 If the real root of the equation

$$\frac{x^5}{x^4-18} + \sqrt[4]{18-x^4} = 0$$

is a, which of the following is the integer part of the number $10(a-1)$?

8 Если действительный корень уравнения

$$\frac{x^5}{x^4-18} + \sqrt[4]{18-x^4} = 0$$

равен a, то какое из следующих чисел является целой частью числа $10(a-1)$?

8

$$\frac{x^5}{x^4-18} + \sqrt[4]{18-x^4} = 0$$

tənliyinin həqiqi kökü a isə, aşağıdakılardan hansı $10(a-1)$ ədədinin tam hissəsidir?

A) 0 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

Çözüm

$$x^5 = (18-x^4)(18-x^4)^{\frac{1}{4}} = (18-x^4)^{\frac{5}{4}}.$$

Buradan,

$$x^4 = 18-x^4 \Rightarrow x^4 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{3}.$$

$\sqrt{3} = 1,7\cdots$ olduğundan,

$$10(\sqrt{3}-1) = 7,\cdots$$

olup,

$$\lfloor 10(\sqrt{3}-1) \rfloor = 7$$

bulunur.

Yanıt : **D) 7**

9. **11 Puan - 11 Points - 11 баллов - 11 xal**

9

$$|5x-30|+|2y-29| \le \frac{5}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan (x, y) noktalarının oluşturduğu bölgenin alanı kaçtır?

9 What is the area of the region formed by the points (x, y) that satisfy the inequality

$$|5x-30|+|2y-29| \le \frac{5}{2}\ ?$$

9 Какова площадь области, образованной точками (x, y), удовлетворяющими неравенству

$$|5x-30|+|2y-29| \le \frac{5}{2}\ ?$$

9

$$|5x-30|+|2y-29| \le \frac{5}{2}$$

bərabərsizliyini ödəyən (x, y) nöqtələrinin yaratdığı bölgənin sahəsi neçəyə bərabərdir?

A) $\frac{5}{4}$ **B)** $\frac{17}{8}$ **C)** 5 **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** $\frac{15}{8}$

Çözüm

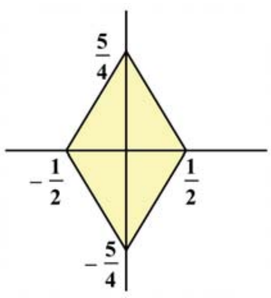
Bu şekli ötelediğimizde alanı değişmez. O halde,

$$x = x' + 6 \quad \text{ve} \quad y = y' + \frac{29}{2}$$

yazılırsa verilen eşitsizlik

$$|5x| + |2y| \le \frac{5}{2}$$

biçimine dönüşür. Bu bölge eşkenar dörtgen şeklinde bir bölgedir. $y = 0$ ise $|x| \le \frac{1}{2}$ ve $x = 0$ ise $|y| \le \frac{5}{4}$ olduğundan aşağıdaki gibi olacaktır.



Bu bölgenin alanı ise köşegenlerinin çarpımının yarısıdır ve $\frac{1 \cdot (5/2)}{2} = \frac{5}{4}$ bulunur.

Yanıt : **A)** $\frac{5}{4}$

10. **11 Puan - 11 Points - 11 баллов - 11 xal**

10 Koordinat düzleminde

$$K = \{(x,y) | -30 \leq x \leq 30; \quad -30 \leq y \leq 30\}$$

kümesi verilsin. Bu kümede, $x^3y^2 = 4xy$ eşitliğini sağlayan kaç tane tam sayı koordinatlı (x,y) noktası vardır?

10 Let the set

$$K = \{(x,y) | -30 \leq x \leq 30; \quad -30 \leq y \leq 30\}$$

be given in the coordinate plane. How many points (x,y) with integer coordinates are there in this set that satisfy the equality $x^3y^2 = 4xy$?

10 Пусть на координатной плоскости задано множество

$$K = \{(x,y) | -30 \leq x \leq 30; \quad -30 \leq y \leq 30\}.$$

Сколько точек (x,y) с целочисленными координатами содержится в этом множестве, удовлетворяющих равенству $x^3y^2 = 4xy$?

10 Koordinat müstəvisində

$$K = \{(x,y) | -30 \leq x \leq 30; \quad -30 \leq y \leq 30\}$$

çoxluğu verilsin. Bu çoxluqda $x^3y^2 = 4xy$ bərabərliyini ödəyən neçə tam koordinatlı (x,y) nöqtəsi var?

A) 121 **B**) 125 **C**) 144 **D**) 135 **E**) 120

Çözüm

61 tane $(0,y)$ noktası ve 61 tane $(x,0)$ noktası eşitliği sağlar. $(0,0)$ iki defa sayıldığından, en az bir koordinatı sıfır olan ve eşitliği sağlayan noktalar sayısı 121'dir. Şimdi, $x \neq 0, y \neq 0$ olsun. Eşitliği şöyle yazabiliriz:

$$x^2y = 4.$$

Bu eşitliği sağlayan (x,y) çiftleri:

$$(1,4), (-1,4), (2,1), (-2,1)\text{'dir.}$$

Sonuç olarak, istenen özelliğe sahip $n = 125$ nokta vardır.

Yanıt : **B) 125**

11. **11 Puan - 11 Points - 11 баллов - 11 xal**

11 $x_1 = x_2 = 1$ ve her $n = 2, 3, \ldots$ için $\dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{x_n}$ sağlanırsa,

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{99} x_{100}}$$

toplamı kaç olur?

11 If $x_1 = x_2 = 1$ and $\dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{x_n}$ for all $n = 2, 3, \ldots$, what is the sum of

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{99} x_{100}}?$$

11 Если $x_1 = x_2 = 1$ и $\dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{x_n}$ для всех $n = 2, 3, \ldots$, чему равна сумма

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{99} x_{100}}?$$

11 $x_1 = x_2 = 1$ ve bütün $n = 2, 3, \ldots$ ədədləri üçün $\dfrac{x_{n+1} - x_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{x_n}$ olarsa,

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{99} x_{100}}$$

cəmi neçə olar?

A) $\dfrac{91}{50}$ **B)** $\dfrac{93}{50}$ **C)** $\dfrac{97}{50}$ **D)** $\dfrac{99}{50}$ **E)** $\dfrac{103}{50}$

Çözüm Verilen bağıntıdan $n = 2, 3, \cdots$ için $x_n \cdot x_{n+1} - x_{n-1} \cdot x_n = n$ bulunur. $x_{n-1} \cdot x_n = a_n$ dersek, $a_{n+1} - a_n = n$ olur.

$$a_3 - a_2 = 2;$$
$$a_4 - a_3 = 3;$$
$$\ldots$$
$$a_{n+1} - a_n = n$$

eşitlikleri toplanırsa,

$$a_{n+1} - a_2 = 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

ve $a_2 = x_1 \cdot x_2 = 1$ olduğuna göre,

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)(n-1)}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

olur. O halde,

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 2\left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\right]$$
$$= 2\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Buradan,

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{99} x_{100}} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{100}} = 2\left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{99}{50}$$

Yanıt : **D)** $\dfrac{99}{50}$

12. **12 Puan - 12 Points - 12 баллов - 12 xal**

12 a ve b pozitif sayılar olmak üzere, her $xy \neq 0$ için

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq 0$$

olsun. b sayısının olabileceği en büyük değer kaçtır?

12 Let

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq 0$$

for all $xy \neq 0$, where a and b are positive numbers. What is the largest possible value of the number b?

12 Пусть

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq 0$$

для всех $xy \neq 0$, где a и b — положительные числа. Каково наибольшее возможное значение числа b?

12 Bütün $xy \neq 0$ üçün,

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq 0$$

olsun. Burada a və b müsbət ədədlərdir. b ədədinin mümkün olan ən böyük qiyməti hansıdır?

A) 6 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 10

Çözüm AGO eşitsizliğinden,

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq \frac{8}{|x||y|^3} + \frac{b}{xy^3}$$

olur. Buradan görülüyor ki, $b \leq 8$ olması durumunda

$$\frac{8}{|x||y|^3} + \frac{b}{xy^3} \geq 0$$

ve dolayısıyla

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy^3} + \frac{16}{ay^6} \geq 0$$

olur. $b > 8$ olursa, örneğin, $x = 2a, y = -2$ alırsak, eşitsizlik yön değiştirir. Dolayısıyla, b en fazla 8 olabilir.

Yanıt : **C) 8**

13. **12 Puan - 12 Points - 12 баллов - 12 xal**

13 Gökhan tahtaya ilk 50 pozitif tam sayının karelerini sırasıyla yazarak aşağıdaki sayı dizisini elde ediyor : $1^1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots, 49^2, 50^2$. Nihan ise, 1'den sonraki tüm virgülleri ikişerli olarak eksi $(-)$ ve artı $(+)$ işaretleriyle değiştiriyor. Elde edilen $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 48^2 + 49^2 - 50^2$ işleminin sonucu kaçtır?

13 Gökhan writes the squares of the first 50 positive integers in order on the board and obtains the following numerical sequence: $1^1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots, 49^2, 50^2$. Nihan then replaces all the commas after 1 with minus $(-)$ and plus $(+)$ signs in pairs. What is the result of the operation $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 48^2 + 49^2 - 50^2$?

13 Гёкхан записывает на доске квадраты первых 50 положительных целых чисел по порядку и получает следующую числовую последовательность: $1^1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots, 49^2, 50^2$. Затем Нихан заменяет все запятые после 1 на знаки минус $(-)$ и плюс $(+)$ попарно. Каков результат действия $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 48^2 + 49^2 - 50^2$?

13 Gökhan ilk 50 müsbət tam ədədin kvadratlarını lövhədə ardıcıllıqla yazır və aşağıdakı ədədi ardıcıllığı alır: $1^1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots, 49^2, 50^2$. Nihan isə, 1-dən sonra bütün vergülləri cüt-cüt mənfi $(-)$ və müsbət $(+)$ işarələri ilə əvəz edir. Əldə edilən $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 48^2 + 49^2 - 50^2$ ifadəsinin nəticəsi nədir?

A) -51 **B)** -52 **C)** 39 **D)** 43 **E)** -43

Çözüm

$$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4$$

olduğunu kullanacağız. Buna göre,

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 &= 4, \\ 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 &= 4, \\ &\cdots \\ 45^2 - 46^2 - 47^2 + 48^2 &= 4 \\ 49^2 - 50^2 &= -99 \end{aligned}$$

olduğundan, $\frac{45-1}{4} + 1 = 12$ olduğu da göz önüne alınırsa, $12 \cdot 4 - 99 = -51$elde edilir. **Yanıt** : **A) -51**

14. **12 Puan - 12 Points - 12 баллов - 12 xal**

14 $S = \{1,2,3,\ldots,2025\}$ kümesinden rastgele $a,\ b$ ve c elemanları seçiliyor.

$$a \cdot b \cdot c + a \cdot b + 2024 \cdot a$$

değerinin 5 ile tam bölünme olasılığı kaçtır?

14 The elements a, b and c are randomly selected from the set $S = \{1,2,3,\ldots,2025\}$. What is the probability that

$$a \cdot b \cdot c + a \cdot b + 2024 \cdot a$$

is divisible by 5?

14 Элементы a, b и c случайным образом выбираются из множества $S = \{1,2,3,\ldots,2025\}$. Какова вероятность того, что значение выражения

$$a \cdot b \cdot c + a \cdot b + 2024 \cdot a$$

будет делиться на 5 без остатка?

14 a, b və c elementləri $S = \{1,2,3,\ldots,2025\}$ çoxluğundan təsadüfi seçilir.

$$a \cdot b \cdot c + a \cdot b + 2024 \cdot a$$

ədədinin 5-ə bölünmə ehtimalı nədir?

A) $\frac{41}{125}$ **B)** $\frac{39}{125}$ **C)** $\frac{37}{125}$ **D)** $\frac{43}{125}$ **E)** $\frac{31}{125}$

Çözüm

$$abc + ab + 2024a = a(bc + b + 2024)$$

eşitliğine göre a sayısını 5'in katı ise bu çarpım 5 ile tam bölünür. S kümesinden seçilen bir elemanın 5 ile bölünebilme olasılığı $\frac{1}{5}$'tir. Eğer a sayısı 5'in katı değilse ki bunun olasılığı $\frac{4}{5}$ tir. Bu durumda, $bc + b + 2024$ ifadesi 5 ile bölünmelidir.

$$bc + b + 4 \equiv 0 (\operatorname{mod} 5) \Rightarrow b(c+1) \equiv 1 (\operatorname{mod} 5)$$

olduğundan dört durum söz konusudur.

i) $b \equiv 1 (\operatorname{mod} 5)$ ve $c + 1 \equiv 1 (\operatorname{mod} 5)$
ii) $b \equiv 4 (\operatorname{mod} 5)$ ve $c + 1 \equiv 4 (\operatorname{mod} 5)$
iii) $b \equiv 2 (\operatorname{mod} 5)$ ve $c + 1 \equiv 3 (\operatorname{mod} 5)$
iv) $b \equiv 3 (\operatorname{mod} 5)$ ve $c + 1 \equiv 2 (\operatorname{mod} 5)$

Her dört durumun da olasılığı $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ olduğundan, a sayısının 5'in katı olmaması durumunda $abc + ab + 2024a$ değerinin 5 ile bölünme olasılığı

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{25} = \frac{16}{125}$$

bulunur. O halde, istenen olasılık $\frac{16}{125} + \frac{1}{5} = \frac{41}{125}$ bulunur.

Yanıt : **A)** $\frac{41}{125}$

15. **13 Puan - 13 Points - 13 баллов - 13 xal**

15 $P(x)$ ikinci dereceden bir polinom olsun. $P(-1) = -1,\ P(1) = 3$ ve $P(3) = 1$ ise, $P(P(x)) = x$ denkleminin tamsayı olmayan kökü aşağıdakilerden hangisidir?

15 Let $P(x)$ be a second degree polynomial. If $P(-1) = -1$, $P(1) = 3$ and $P(3) = 1$, which of the following is the non-integer root of the equation $P(P(x)) = x$?

15 Пусть $P(x)$ — многочлен второй степени. Если $P(-1) = -1$, $P(1) = 3$ и $P(3) = 1$, какой из следующих является нецелым корнем уравнения $P(P(x)) = x$?

15 $P(x)$ ikinci dərəcəli çoxhədli olsun. $P(-1) = -1$, $P(1) = 3$ və $P(3) = 1$ olarsa, aşağıdakılardan hansı $P(P(x)) = x$ tənliyinin tam olmayan köküdür?

A) $\frac{5}{3}$ **B)** $\frac{8}{3}$ **C)** $\frac{7}{3}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{3}{8}$

Çözüm $P(x) = ax^2 + bx + c$ formunda bir polinomdur. Fakat daima

$$P(x) = a(x+1)(x-1) + b(x+1)(x-3) + c(x-1)(x-3)$$

biçiminde de yazılabilir. $P(-1) = -1$, $P(1) = 3$ ve $P(3) = 1$ kullanılırsa,

$$P(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + \frac{7}{4}$$

bulunur. $P(P(x)) = x$ denkleminin üç kökü $x = -1, 1, 3$ tür. Dördüncü kök m olsun.

$$P(P(m)) = m \text{ ise } P(m) = m$$

olacaktır. $P(m) = n$ olsaydı, $P(n) = m$ olacak ve hem n hem de m kök olacaktı.

$$P(P(m)) = m \Rightarrow P(n) = m$$

2 tane daha kök elde edilecekti. O halde,

$$P(x) = x \Rightarrow -\frac{3}{4}x^2 + 2x + \frac{7}{4} = x \Rightarrow -\frac{3}{4}x^2 + x + \frac{7}{4} = 0$$

denkleminden $x = -1$ ve $x = \frac{7}{3}$ elde edilir.

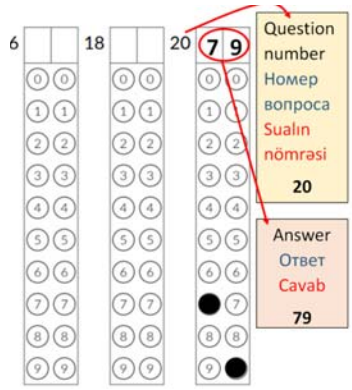
Yanıt : **C)** $\frac{7}{3}$

Questions with no answer choises - вопросы без вариантов ответа- cavab variantları olmayan suallar.

The answers to questions 16, 17, 18, 19 and 20 are two-digit positive numbers. After solving these questions, find the number of the question in the optical form and code the two-digit number.

Ответы на вопросы 16, 17, 18, 19 и 20 — двузначные положительные числа. Решив эти вопросы, найдите номер вопроса в оптической форме и закодируйте двузначное число.

16, 17, 18, 19 və 20-ci sualların cavabları ikirəqəmli müsbət ədədlərdir. Bu sualları həll etdikdən sonra optik formada sualın nömrəsini tapın və ikirəqəmli rəqəmi kodlayın.



16. **15 Puan - 15 Points - 15 баллов - 15 xal**

16 $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 97 + 98 + 99$ toplamında belirli sayıda "+" işareti "−" işaretiyle değiştirilerek 2024 sayısı elde edilmiştir. İşareti değiştirilmeyen sayıların toplamı A olsun. A sayısının rakamları toplamı kaçtır?

16 In the sum of $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 97 + 98 + 99$, a certain number of "+" signs were replaced with "−" signs to obtain the number 2024. Let the sum of the numbers whose signs were not changed be A. What is the sum of the digits of the number A?

16 В сумме $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 97 + 98 + 99$ некоторое количество знаков «+» заменили на знаки «–» и получено число 2024. Пусть сумма чисел, знаки которых не были изменены, равна A. Какова сумма цифр числа A?

16 $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 97 + 98 + 99$ cəmində müəyyən sayda "+" işarəsini "−" işarəsi ilə əvəz etməklə 2024 ədədi alınmışdır. İşarələri dəyişdirilməyən ədədlərin cəmi A olsun. A ədədinin rəqəmlərinin cəmi neçəyə bərabərdir?

Çözüm Tamamının toplamı

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$$

dir. İşareti değiştirilmeyen sayıların toplamı A, değiştirilenlerin toplamı da B olsun.

$$A + B = 4950$$

$$A - B = 2024$$

denklemlerinden $2A = 6974$ ve $A = 3487$ olur. A sayısının rakamları toplamı 22 bulunur. **Yanıt** : **22**

17. **15 Puan - 15 Points - 15 баллов - 15 xal**

17 Bir abc üç basamaklı sayısı için $P_n(abc) = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ olsun. Örneğin, $P_3(512) = 5^3 \cdot 1^3 \cdot 2^3 = 1000$. Buna göre,

$$P_3(111) + P_3(112) + P_3(113) + \cdots + P_3(998) + P_3(999)$$

toplamının pozitif bölen sayısı kaçtır?

17 Let $P_n(abc) = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ for a three-digit number abc. For example, $P_3(512) = 5^3 \cdot 1^3 \cdot 2^3 = 1000$. What is the number of positive divisors of the sum

$$P_3(111) + P_3(112) + P_3(113) + \cdots + P_3(998) + P_3(999) \ ?$$

17 Пусть для трехзначного числа abc, $P_n(abc) = a^n \cdot b^n \cdot c^n$. Например, $P_3(512) = 5^3 \cdot 1^3 \cdot 2^3 = 1000$. Каково количество положительных делителей суммы

$$P_3(111) + P_3(112) + P_3(113) + \cdots + P_3(998) + P_3(999) \ ?$$

17 Üçrəqəmli abc ədədi üçün $P_n(abc) = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ olsun. Məsələn, $P_3(512) = 5^3 \cdot 1^3 \cdot 2^3 = 1000$.

$$P_3(111) + P_3(112) + P_3(113) + \cdots + P_3(998) + P_3(999)$$

cəminin müsbət bölənlərinin sayı neçədir?

Çözüm

$$\begin{aligned} S &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3)(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3)(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3) \\ &= \left(\frac{9 \cdot 10}{2}\right)^6 \\ &= 3^{12} 5^6 \end{aligned}$$

olduğundan, pozitif bölen sayısı $13 \cdot 7 = 91$ olur.

Yanıt : **91**

18. **15 Puan - 15 Points - 15 баллов - 15 xal**

18 Bir f fonksiyonu her reel x için, $f(101-x) = f(x)$ ve $f(70-x) = f(x+30)$ eşitliklerini sağlamaktadır. Eğer $f(3)+f(5)+f(15) = 51$ ise, $f(2)+f(4)+f(8)+f(16)$ toplamı kaçtır?

18 Let a function f satisfy the equations $f(101-x) = f(x)$ and $f(70-x) = f(x+30)$ for all real x. If $f(3)+f(5)+f(15) = 51$, what is the sum of $f(2)+f(4)+f(8)+f(16)$?

18 Пусть функция f удовлетворяет уравнениям $f(101-x) = f(x)$ и $f(70-x) = f(x+30)$ для всех действительных x. Если $f(3)+f(5)+f(15) = 51$, чему равна сумма $f(2)+f(4)+f(8)+f(16)$?

18 f funksiyası bütün real x ədədləri üçün $f(101-x) = f(x)$ və $f(70-x) = f(x+30)$ tənliklərini ödəsin. Əgər $f(3)+f(5)+f(15) = 51$ olarsa, $f(2)+f(4)+f(8)+f(16)$ cəmi neçəyə bərabərdir?

Çözüm İkinci eşitlikte x yerine $(x-30)$ yazarsak, $f(x) = f(100-x)$ olur. Birinci denklemle kıyaslarsak, her x için

$$f(101-x) = f(100-x)$$

olur. $x = -y+100$ yazarsak, her y için

$$f(y+1) = f(y)$$

olur. Yani, f periyodu 1 olan periyodik fonksiyondur. O halde, $f(1) = a$ dersek, her $k \in \mathbb{Z}$ için $f(k) = a$ olur. Verilen koşuldan,

$$3a = 51 \Rightarrow a = 17$$

bulunur. O halde,

$$f(2)+f(4)+f(8)+f(16) = 4 \cdot 17 = 68$$

elde edilir.

Yanıt : **68**

19. **15 Puan - 15 Points - 15 баллов - 15 xal**

19 Her x reel sayısı için,

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-9)(x-10) = x^{10} + ax^9 + bx^8 + \cdots + cx + d$$

eşitliği sağlanırsa, b katsayısının pozitif bölen sayısı kaçtır?

19 If the equality

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-9)(x-10) = x^{10} + ax^9 + bx^8 + \cdots + cx + d$$

holds for each real number x, then what is the number of positive divisors of the coefficient b?

19 Если для каждого действительного числа x выполняется равенство

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-9)(x-10) = x^{10} + ax^9 + bx^8 + \cdots + cx + d,$$

то каково количество положительных делителей коэффициента b?

19 Əgər

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-9)(x-10) = x^{10} + ax^9 + bx^8 + \cdots + cx + d$$

bərabərliyi hər x həqiqi ədədi üçün ödənirsə, b əmsalının müsbət bölənlərinin sayı neçədir?

Çözüm Vieta formülüne göre, b katsayısı köklerin ikişerli çarpımlar toplamıdır. O halde,

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}[(1+2+\cdots+10)^2 - (1^2+2^2+\cdots+10^2)] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+10}{2}\cdot 10\right)^2 - \frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}\right] \\ &= \frac{1}{2}[55^2 - 11\cdot 35] \\ &= \frac{1}{2}\cdot 11\cdot [11\cdot 25 - 35] \\ &= \frac{1}{2}\cdot 11(275-35) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 11\cdot 240 \\ &= 11\cdot 120 \\ &= 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 11 \end{aligned}$$

Yanıt : $4\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32$.

Yanıt : 32

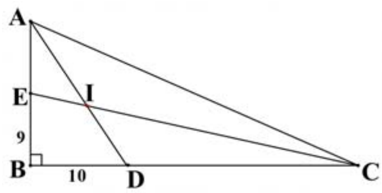
20. **15 Puan - 15 Points - 15 баллов - 15 xal**

20 $m(\angle B) = 90^\circ$ olan ABC dik üçgeninde A ve C köşelerinden çizilen iç açıortaylar BC ve AB kenarlarını sırasıyla D ve E noktalarında kesmektedir. $|EB| = 9$ ve $|BD| = 10$ ise ABC üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapının karesi kaçtır?

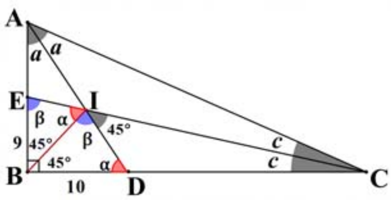
20 In the right triangle ABC with $m(\angle B) = 90^\circ$, the angle bisectors drawn from the vertices A and C intersect the sides BC and AB at points D and E, respectively. If $|EB| = 9$ and $|BD| = 10$, what is the square of the radius of the inscribed circle of triangle ABC?

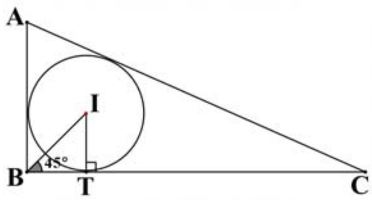
20 В прямоугольном треугольнике ABC с $m(\angle B) = 90^\circ$ биссектрисы, проведенные из вершин A и C, пересекают стороны BC и AB в точках D и E соответственно. Если $|EB| = 9$ и $|BD| = 10$, чему равен квадрат радиуса вписанной окружности треугольника ABC?

20 $m(\angle B) = 90^\circ$ olan ABC düzbucaqlı üçbucağında A və C təpələrindən çəkilmiş tənbölənləri BC və AB tərəflərini, müvafiq olaraq, D və E nöqtələrində kəsir. Əgər $|EB| = 9$ və $|BD| = 10$ olarsa, ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrəsinin radiusunun kvadratı neçəyə bərabərdir?



Çözüm





$m(\angle BAD) = a$ ve $m(\angle ECB) = c$ olsun. $2a + 2c = 90^\circ$ ve $a + c = 45^\circ$ olur. $m(\angle CID) = a + c = 45^\circ$ (AIC üçgeninde dış açı) ve I noktası iki iç açıortayın kesim noktası olduğundan iç teğet çemberin merkezidir. $[BI]$ çizilirse $m(\angle EBI) = m(\angle IBD) = 45^\circ$ olur. AÇı takibi yapılırsa, $m(\angle BEI) = m(\angle BID) = \beta$ ve $m(\angle BIE) = m(\angle BDI) = \alpha$ olur. Bu durumda,

$$\triangle EBI \sim \triangle IBD$$

benzerliği elde edilir. Benzerlik oranları kullanılarak

$$\frac{|BI|}{9} = \frac{10}{|BI|}$$

eşitliğinden $|BI|^2 = 90$ olur. $r^2 + r^2 = 90$ eşitliğinden, $r^2 = |IT| = 45$ elde edilir.

Yanıt : **45**

2025

Soruların Puanları

1	B	**11**	D
2	E	**12**	C
3	B	**13**	A
4	C	**14**	A
5	E	**15**	C
6	C	**16**	22
7	E	**17**	91
8	D	**18**	68
9	A	**19**	32
10	B	**20**	45

1	8 puan	**11**	11 puan
2	8 puan	**12**	12 puan
3	9 puan	**13**	12 puan
4	9 puan	**14**	12 puan
5	9 puan	**15**	13 puan
6	10 puan	**16**	15 puan
7	10 puan	**17**	15 puan
8	10 puan	**18**	15 puan
9	11 puan	**19**	15 puan
10	11 puan	**20**	15 puan