2024
АНТАЛЬЯ
МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11. КЛАСС ВОПРОСНИК

ИМЯ ФАМИЛИЯ : ....

ШКОЛА: .... КЛАСС: ....

ПОДПИСЬ : ....

Правила проведения экзамена

1. На экзамен запрещается заходить с мобильным телефоном. Телефон нужно сдать контролёру. Длительность экзамена составляет 120 минут и экзамен состоит из 25 тестовый заданий.

2. Каждый вопрос имеет всего один правильный ответ. Выберите верный вариант и полностью закрасьте кружок на листе ответов, в соответствие с номером вопроса. Ни один ответ в вопроснике не будет принят.

3.Все вопросы равносильные, четыре неправильных ответа забирают один правильный. При оценивании не отмеченный вопрос никак не влияет на общий балл.

4.Степень сложности вопросов последовательно не увеличивается. Поэтому, прежде чем начать, лучше ознакомиться со всеми вопросами.

5. На экзамене запрещается использовать дополнительные принадлежности(циркуль, линейку, калькулятор), а также дополнительные листы для вычислений. Все вычисления должны проводиться в вопроснике.

6. Во время экзамена нельзя разговаривать и задавать вопросы контролёрам. Существует очень малая вероятность, того что в вопросах будет ошибка. Если произойдёт подобное, то экзаменационный центр предпримет нужные меры. В данной ситуации с вашей стороны остаётся выбрать верный для вас вариант ответа.

7.Ученикам запрещено просить друг у друга карандаш, ручку, ластик и тому подобное.

8. Первые 60 минут запрещено покидать экзамен. Участник, покинувший экзаменационный зал, не может обратно зайти на экзамен.

9. После окончания экзамена обязательно сдайте контролёру вопросник и лист ответов.

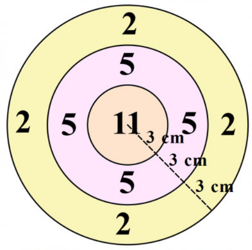
1. Сколько различных множеств C, удовлетворяют условию

$$C \subseteq B \qquad \text{и} \qquad s(A \backslash C) = 3$$

где $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ и $B = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

A) 30 B) 45 C) 15 D) 75 E) 60

2.



Бурхан бросает дротики в доску для игры дартс, состоящую из кругов с общим центром и радиусами 3, 6, 9*см* соответственно. Каждый раз дротик попадает в некоторый сектор. При продолжительном бросании дротиков, определите среднее количество очков Бурхана?

A) 5 B) 4 C) 6 D) 5,5 E) 4,5

3. Зная, что

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{97} + \frac{1}{99}$$
$$B = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{101}$$
$$C = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{97} + \frac{1}{99}$$
$$D = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{101}$$

вычислите значение выражения: $A \cdot B - C \cdot D$.

A) $\frac{98}{101}$ B) $\frac{99}{101}$ C) $\frac{98}{303}$ D) $\frac{100}{303}$ E) $\frac{100}{101}$

4. Для целого положительного числа x, верно следующее равенство

$$x^x = 2^{24} \cdot 3^x$$

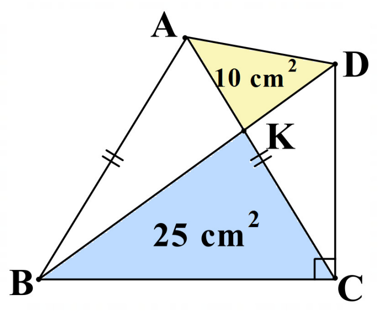
найдите значение выражения: $\left(\frac{x}{4}\right)^3$.

A) 12 B) 8 C) 64 D) 81 E) 27

5. 97% веса, 15 - килограммового арбуза, составляет вода. После длительного нахождения арбуза под солнцем, вода составила 95% его веса. Найдите вес арбуза (в килограммах), после его нахождения под солнцем.

A) 9 B) 7 C) 10 D) 12 E) 13

6. Для данного на рисунке выпуклого четырёхугольника $ABCD$, $m(\angle BCD) = 90^\circ$, $|AB| = |AC|$ и $AC \cap BD = K$. Скольким см^2 равна площадь $ABCD$, если площади треугольников AKD и BCK равны 10 см^2 и 25 см^2 соответственно.



A) 55 B) 60 C) 90 D) 70 E) 105

7. Найдите сумму целых значений a, при которых уравнение

$$x^2 + ax - (4a + 1) = 0$$

имеет два целых положительных корня?

A) –36 B) –48 C) –44 D) –40 E) –16

8. Пусть корнями уравнения $x^4 + x + 1 = 0$ являются числа a, b, c, d. Найдите сумму

$$S = \frac{a^2}{a^3+1} + \frac{b^2}{b^3+1} + \frac{c^2}{c^3+1} + \frac{d^2}{d^3+1}.$$

A) 1 B) 5 C) 3 D) 7 E) 9

9. Сколькими различными способами можно разложить 10 одинаковых книг по математике, 9 одинаковых книг по физике и 1 книгу по химии на полке, чтобы две рядом стоящие книги не были книгами одного предмета?

A) 45 B) 38 C) 36 D) 48 E) 35

10. Для действительных чисел x и y, верны следующие равенства:

$$\sqrt{x\sqrt[5]{y}} = 6^6 \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{y\sqrt[5]{x}} = 4^4,$$

Сколько целых положительных делителей имеет целое число $x \cdot y$?

A) 341 B) 300 C) 360 D) 310 E) 321

11. В треугольнике ABC, $|AB| = 5$, $|BC| = 6$ и $|AC| = 7$. AD и BE являются высотами, проведёнными из вершин A и B. Найдите радиус окружности описанный около треугольника CDE ?

A) $\frac{18\sqrt{6}}{11}$ B) $\frac{25\sqrt{6}}{24}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

12. Зная, что $x < y < z$, найдите сколько положительных целых троек (x,y,z) удовлетворяют равенству:

$$x + x \cdot y + x \cdot y \cdot z = 1111$$

A) 1 B) 7 C) 4 D) 3 E) 10

13. В городе все телефонные номера шестизначные и должны соответствовать трём нижеприведённым требованиям:

■ Хотя бы 1 цифра телефонного номера должна быть отлична от нуля .

■ В номере сумма первых трёх цифр, должна быть равна сумме последних трёх цифр.

■ Сумма цифр стоящих на нечётных местах, равна сумме цифр стоящих на чётных местах .

Например, возьмём один из телефонных номеров города

0	5	4	1	5	3

как мы видим, для него верны все требования. $0 + 4 + 5 = 5 + 1 + 3$.

Учитывая данные требования, определите наибольшее возможное количество различных телефонных номеров данного города.

A) 6624 B) 6440 C) 6400 D) 6644 E) 6699

14. Для $x, y \in \mathbb{R}$, найдите наибольшее возможное значение выражения $x + y - xy$, если

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}.$$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{9}{4}$

15. Многочлен $Q(x)$, при целых значениях x, принимает целые значения.

$$P(x) = 3x - 3 + (x-1)(x-2)Q(x)$$

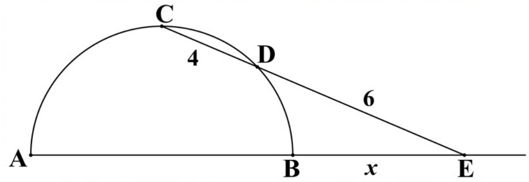
Для многочлена $P(x)$ с наименьшей степенью, вычислите значение $P(6)$, если для некоторого целого числа $n > 3$, справедливо равенство $P(n) = n!$.

A) 156 B) 195 C) 183 D) 186 E) 201

16. На рисунке дана полуокружность с диаметром AB, где точка C делит дугу AB на две равные части. На дуге BC взята точка D.

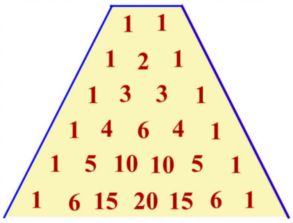
$$CD \cap AB = E, \quad |DE| = 6,\ |CD| = 4$$

Найдите длину $|BE| = x$?



A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{5}$

17. Трапеция Паскаля, состоит из числовых строчек, каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел, предыдущей строки.



Продолжая заполнять трапецию Паскаля, на какой строке последовательные три числа, будут пропорциональны числам $2,\ 3$ и 4. Например, последовательные три числа $4,\ 6,\ 4$ из 4 строки пропорциональны числам $2,\ 3,\ 2$.

A) 43 B) 36 C) 42 D) 34 E) 44

18. Обозначим через S количество всех слов, состоящих из 40 букв, составленных с помощью букв a, b, c, при условии, что количество буква a во всех словах четное число. Найдите остаток от деления числа S на 55. (замечание: ноль является чётным числом).

A) 1 B) 2 C) 54 D) 24 E) 15

19. Последовательность положительных целых чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите чему равен a_{100},
если

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 133,$$

$$a_{a_1} + a_{a_2} + a_{a_3} + a_{a_4} + a_{a_5} + a_{a_6} + a_{a_7} = 553.$$

A) 440 B) 210 C) 403 D) 506 E) 434

20. На сторонах AC и BC равностороннего треугольника ABC, взяты точки F и E соответственно, так что

$$3|EC| = |FC| = 6.$$

Найдите длину $|AD|$, если

$$EF \cap AB = D \quad \text{и} \quad BF \perp FE.$$

A) 8 B) 10 C) 14 D) 12 E) 15

21. При $m, n \in \mathbb{Z}^+$ выражение $\sqrt[n]{a^m}$, можно записать в виде степени с рациональным показателем $a^{m/n}$.
Для целых положительных чисел m и n, найдите сумму всевозможных значений n, удовлетворяющих равенству:

$$\sqrt[m]{7}\,\sqrt[n]{49} = \sqrt[7]{7}.$$

A) 248 B) 232 C) 255 D) 208 E) 108

22. Для переменных u и v и постоянных чисел a_{ij} $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m)$ выражение вида:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} u^i v^j$$

называется многочленом с двумя переменными,а числа a_{ij} называются коэффициентами данного многочлена.
Найдите сумму коэффициентов, если выражение

$$(x^{2024} + y^{2024})$$

будет записано в виде многочлена с переменными $u = xy$ и $v = x + y$.

(Например, для многочлена с двумя переменными

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = v^3 - 3uv$$

сумма коэффициентов, будет $1 + (-3) = -2$).

A) 1 B) -1 C) -3 D) 2023 E) 2024

23. Для $f(a,b) = a + b + ab$, найдите значение нижеследующего выражения:

$$f\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{5}, f\left(\frac{1}{6}, f\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{8}\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

A) $\frac{7}{2}$ B) 3 C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

24. Члены $a_1, a_2, \ldots, a_n$ могут принимать любое значение из следующих целых чисел: $-1,\ 0,\ 1,\ 2;$ при этом должны удовлетворять следующим равенствам:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 61,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 143,$$

Какое наибольшее значение может принять выражение:

$$S = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3.$$

A) 265 B) 230 C) 250 D) 270 E) 245

25. В прямоугольник**ABCD**, где $|\mathbf{AB}| = 2|\mathbf{BC}|$, вписаны две полуокружности с диаметрами **AB** и **BC**. Окружности пересекаются в точке **F**, отличной от точки **B**. Зная, что точка **F** находится на расстоянии 3*см* от стороны **DC**, найдите площадь прямоугольника **ABCD**.

A) 180 B) 210 C) 270 D) 450 E)360